

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VIBRACIONES MECÁNICAS UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Ing. Isidro Legrá Cobas¹, Dr. C. Ramón Quiza Sardiñas²

1. Proyecto de Refinería Matanzas. Vía Blanca, Matanzas, Cuba.

*2. Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de
Matanzas “Camilo Cienfuegos”, Autopista a Varadero km 3½,
Matanzas 44740, Cuba.*

Resumen.

El trabajo presenta un resumen de las bases teórico-conceptuales de las vibraciones mecánicas, destacando su clasificación según diferentes criterios y los principios de la modelación matemática de los fenómenos vibratorios. Dentro de la modelación matemática se remarcan las formas de obtención y solución de las ecuaciones gobernantes para sistemas de uno y varios grados de libertad. También se explican las bases del método de elementos finitos y su aplicación a la solución numérica aproximada de problemas de vibraciones mecánicas de sistemas continuos. Se presenta el elemento tetraédrico lineal como uno de los más comunes en la discretización de dominios tridimensionales sólidos y se muestran las ecuaciones para el cálculo de las matrices de masa y rigidez de este tipo de elemento.

Palabras claves: *Vibraciones mecánicas; Modelación matemática; Elementos finitos.*

1. Introducción.

Las vibraciones son un fenómeno indeseado, pero inevitable, que se produce en todos los elementos de máquinas como consecuencia de la combinación de sus propiedades elásticas e inerciales (Hong et al., 2008).

Ninguna estructura es absolutamente rígida por lo que toda fuerza actuante dará lugar a pequeños desplazamientos, siendo la vibración la reacción de un sistema a una excitación o una fuerza externa o interna aplicada al mismo. En una máquina, cuando es indeseada, suele tener su origen en los problemas mecánicos que pueda presentar la misma.

Dentro de los problemas más comunes que generan vibraciones en las máquinas tenemos el desbalance, desalineamiento, ejes flexados, engranajes gastados o dañados y las correas o cadenas en mal estado

Otras de las causas que también generan vibraciones en las máquinas son los rodamientos deteriorados, las fuerzas electromagnéticas, hidráulicas y aerodinámicas, los aflojamientos, rozamientos y resonancias

Los fenómenos vibratorios provocan, además de otros efectos negativos, desgaste y fatiga mecánica, ambos muy perjudiciales para el buen funcionamiento de las máquinas y aparatos (Vlahopoulos *et al.*, 1999).

Las vibraciones se miden para verificar que las amplitudes no excedan determinados límites, para evitar resonancias, para poder amortiguar o aislar las fuentes de vibraciones, para establecer programas de mantenimiento según condición y para construir o verificar modelos de las estructuras.

Por lo tanto, es muy importante determinar las características vibratorias de las máquinas con vistas a evaluar su estado técnico y planificar su mantenimiento. No obstante, la determinación analítica de estas características suele ser sumamente compleja, volviéndose impracticable para elementos de máquinas reales (Gupta *et al.*, 2006; Bao et al., 2011).

Como solución a esta dificultad, se han propuesto diversas técnicas numéricas, de las cuales la más destacada es el método de elementos finitos, del cual se han reportado numerosas aplicaciones en el cálculo de vibraciones (Kelly, 2000).

El uso de los elementos finitos ha alcanzado una gran difusión dentro de diversas ramas de la ingeniería, ya que permiten resolver problemas de alta complejidad que, de otra forma serían insolubles

El siguiente texto se resumen los principios de la modelación de vibraciones mecánicas y de la aplicación del método de elementos finitos a esta rama.

2. Fundamento de las vibraciones mecánicas.

La teoría de las vibraciones es una rama muy amplia de la física moderna que abarca un gran número de problemas de la mecánica. Tiene particular importancia en la solución de los problemas aplicados que se presenta en la práctica de ingeniería (Neise y Arnold 2001).

De alguna forma a través de los años, ya sea por contacto directo o con el empleo de algún dispositivo de carácter subjetivo, los operadores de las máquinas han empleado técnicas de verificación audible para comprobar si el funcionamiento de su máquina es normal o no; de aquí que tradicionalmente las vibraciones hayan sido utilizadas como un indicador del estado técnico de las máquinas.

El primer analizador de vibraciones fue el cerebro humano, combinando con los sentidos del oído y el tacto. Todavía esta forma de proceder ofrece buenos resultados cuando el sujeto está bien entrenado. No obstante, han sido desarrollados diferentes métodos mecánicos y electrónicos con el propósito de aumentar la eficacia del método.

En su forma más sencilla una vibración se puede considerar como la oscilación o el movimiento repetido de un objeto alrededor de una posición de equilibrio. Esta posición de equilibrio es la que ocupará el cuerpo cuando la fuerza que actúa sobre él sea cero, o sea, en ausencia de perturbaciones exteriores (Kelly, 2000).

Para su uso práctico, el movimiento físico de una máquina, se interpreta como una vibración cuyas frecuencias y amplitudes tienen que ser cuantificadas a través de un dispositivo, que convierta estas en un producto que pueda ser medido y analizado posteriormente (Neise y Arnold 2001).

El tipo más sencillo de vibración mecánica es la llamada oscilación armónica, que puede describirse a través de una ecuación del tipo:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi), \quad (1)$$

donde $x(t)$ es la posición del cuerpo en un instante t dado, x_m es la amplitud de la vibración, ω es la frecuencia angular del movimiento y ϕ es el llamado desfase. Otros parámetros interesantes relacionados con una oscilación armónica son la frecuencia, definida como la cantidad de ciclos que se realizan en una unidad de tiempo, f :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (2)$$

y el período, o el tiempo requerido para completar un ciclo, τ :

$$\tau = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3)$$

La velocidad, $v(t)$, y la aceleración, $a(t)$, en la oscilación armónica se calculan derivando la ecuación (1):

$$v(t) = \dot{x}(t) = -x_m \omega \sin(\omega t + \phi), \quad (4a)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \phi) . \quad (4b)$$

El comportamiento en el tiempo de la posición, la velocidad y la aceleración de una oscilación armónica puede representarse gráficamente tal como se muestra en la Fig. 1.

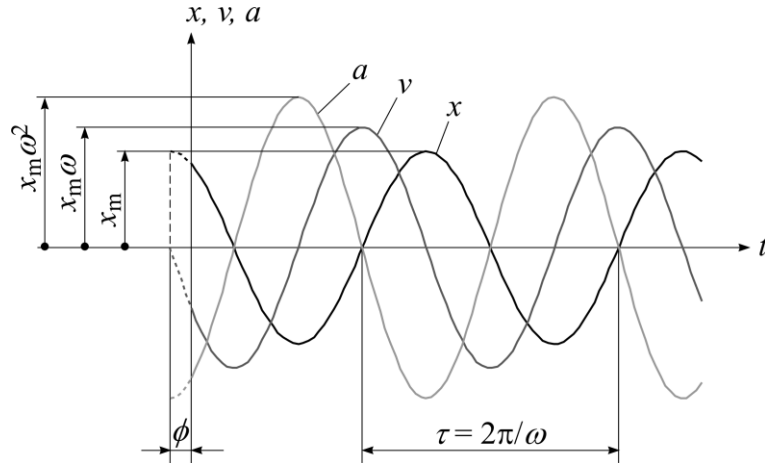


Figura 1 Representación gráfica del movimiento armónico.

Desde el punto de vista de las características del movimiento, las vibraciones pueden ser clasificadas como armónicas, periódicas o estocásticas.

La vibración armónica (ver Fig. 2), tal como se vio en la sección anterior, constituye la forma más simple de oscilación. Puede ser descrita por una curva senoide, y es usualmente generada en sistemas lineales debido a la presencia de algún problema potencial, tal como desbalance.

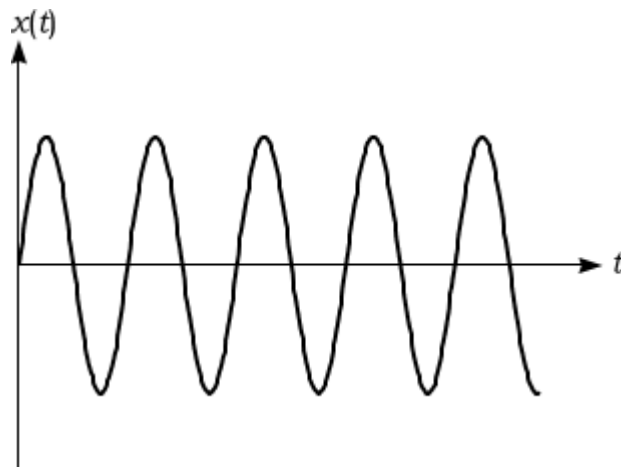


Figura 2 Vibración armónica.

La vibración periódica (ver Fig. 3) es un movimiento que se repite periódicamente pero que no tiene características armónicas. Por ejemplo la vibración causada un problema en una transmisión dentada.

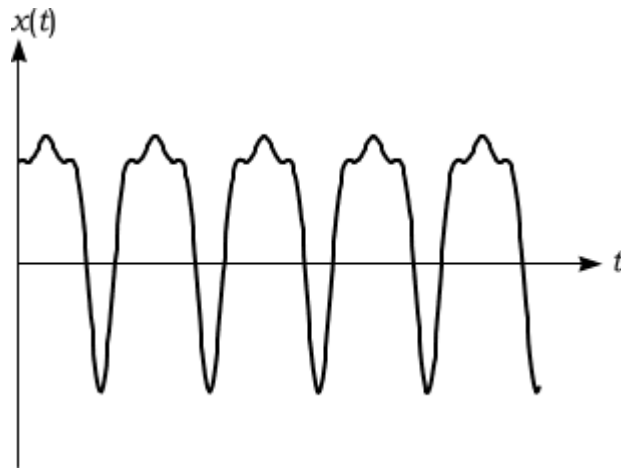


Figura 3 Vibración periódica.

La vibración estocástica (ver Fig. 4) ocurre en forma errática y tiene contenido de frecuencia en toda la banda analizada. Se produce cuando las causas de la vibración no son conocidas de manera determinista. Un ejemplo de este tipo es la vibración de una estructura bajo la acción del viento.

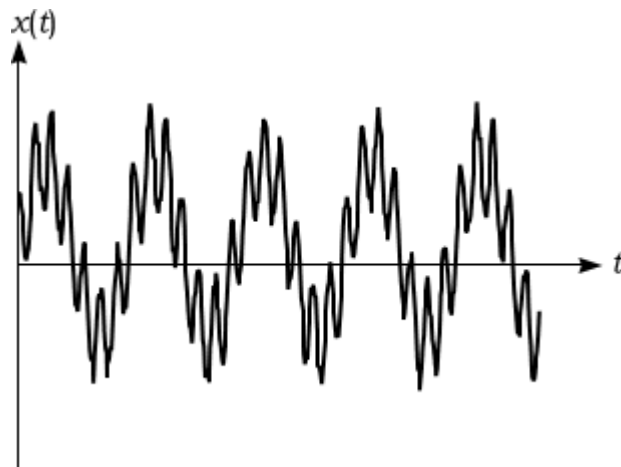


Figura 4 Vibración estocástica.

Otra clasificación de las vibraciones puede llevarse a cabo teniendo en cuenta la causa del movimiento. Según este criterio, las vibraciones pueden ser libres ó forzadas.

La vibración libre ocurre en ausencia de una fuerza externa continuada, o sea, ocurre solamente una excitación inicial o instantánea. Esta excitación inicial viene dada,

generalmente, por un desplazamiento del sistema fuera de su posición de equilibrio. Un ejemplo de este tipo de vibración es una pieza que oscila luego de recibir un golpe.

Por el contrario, la vibración forzada ocurre en presencia de una excitación externa constante. Este tipo de vibración puede verse, por ejemplo, en un motor que vibra bajo la acción de un desbalance en alguna de sus partes rotatorias.

Las vibraciones también clasificarse como no amortiguadas y amortiguadas. La vibración no amortiguada ocurre cuando no se disipa energía mecánica durante el movimiento, por lo cual éste continúa infinitamente.

La vibración amortiguada, en cambio, se produce cuando parte de la energía mecánica del sistema se disipa durante el movimiento, por lo cual su amplitud va disminuyendo con el tiempo.

Aunque, en la práctica todas las vibraciones mecánicas son amortiguadas, muchos casos pueden aproximarse adecuadamente como vibraciones no amortiguadas, ya que la energía disipada es tan pequeña que puede despreciarse sin afectar la precisión de los resultados.

2. Vibraciones mecánicas con uno y más grados de libertad

Un concepto importante en análisis de las vibraciones mecánicas es el de grados de libertad. El número de grados de libertad que un sistema posee es igual al número de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema, todo sistema real tiene infinitos grados de libertad, aunque a veces es suficiente una representación sencilla, incluso con un solo grado de libertad.

Un ejemplo de un sistema con un solo grado de libertad es el de un péndulo física, donde una masa cuelga de una barra inextensible y ligera (Fig. 5). En este sistema, la posición puede ser descrita completamente por una única coordenada, por ejemplo, el ángulo que forma la barra con la vertical.

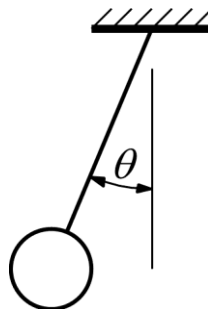


Figura 5 Sistema con un grado de libertad.

Un ejemplo de un sistema que puede modelarse con dos grados de libertad es un automóvil (Fig. 6), en el cual se consideran que todas sus partes son perfectamente rígidas si se comparan con los sistemas de amortiguamiento de sus ejes delantero y trasero. En este

caso, como coordenadas pueden tomarse los desplazamientos de dichos ejes de sus respectivas posiciones de equilibrio.

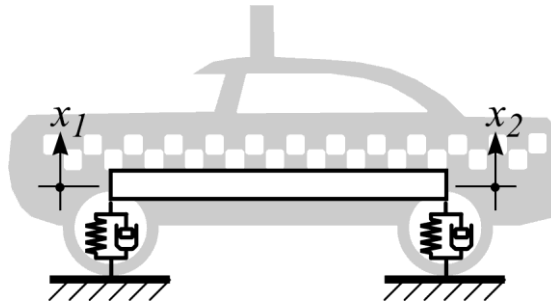


Figura 6 Sistema con dos grados de libertad.

Finalmente, una barra flexible (Fig. 7), de masa no despreciable y empotrada en uno de sus extremos, puede considerarse como un sistema como infinitos grados de libertad, ya que su posición no puede ser conocida sin saber, a su vez, la posición de cada uno de sus puntos.

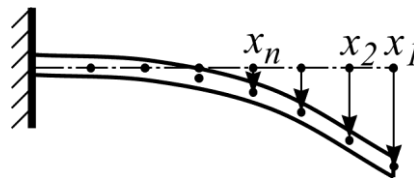


Figura 7 Sistema con infinitos grados de libertad.

Se conoce como modelo a un dispositivo simbólico que permite representar ciertas características de un sistema real y sus relaciones con otras características del propio sistema o del entorno.

La modelación de las vibraciones en un sistema mecánico se lleva a cabo en cuatro pasos fundamentales. El primero es la modelación matemática, que consiste en representar toda la información importante del sistema, descartando toda aquella que no tiene una influencia significativa en los resultados. Por ejemplo, un motor de masa M , girando a una frecuencia ω y con un desbalance de masa m_e y excentricidad e , que se encuentra situado en el extremo de una barra de masa m , con un momento de inercia de su sección transversal igual a I y un material con módulo de elasticidad, E (Fig. 8), puede ser modelado matemáticamente a través de un sistema masa-resorte tal como se muestra en la Fig. 9.

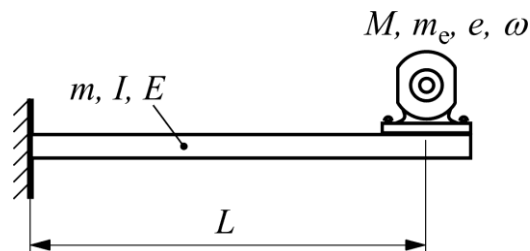


Figura 1.8 Sistema real.

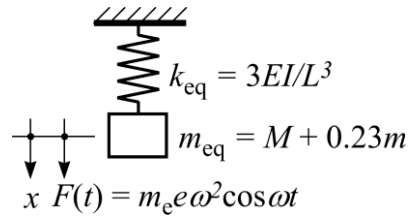


Figura 8 Modelo matemático.

El paso siguiente, es la obtención de las ecuaciones gobernantes del sistema, que son aquellas que describen el movimiento mecánico de la misma según las leyes de la dinámica. Estas expresiones son ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales y pueden obtenerse aplicando directamente la segunda ley de Newton o el principio de Lagrange. En el ejemplo anterior, la ecuación gobernante toma la forma:

$$(M + 0,23m)\ddot{x} + \frac{3EI}{L^3} x = m_e e \omega^2 \cos \omega t . \quad (5)$$

Una vez obtenida la ecuación gobernante, se procede a su solución. Si es posible, esto se lleva a cabo por métodos analíticos, pero para sistemas complejos, especialmente para aquellos con infinitos grados de libertad, esto es totalmente imposible, por lo que se hace necesario aplicar técnicas numéricas para obtener soluciones aproximadas.

En el ejemplo anterior, la solución exacta de la respuesta del sistema puede calcularse analíticamente, dando como resultado la expresión:

$$x(t) = \frac{m_e e \omega^2}{\frac{3EI}{L^3} - (M + 0,23m)\omega^2} \cos \omega t . \quad (6)$$

El último paso, es el análisis los resultados, para obtener toda la información posible de la solución calculada. De gran ayuda es, usualmente, la representación gráfica de esta solución (Fig. 10).

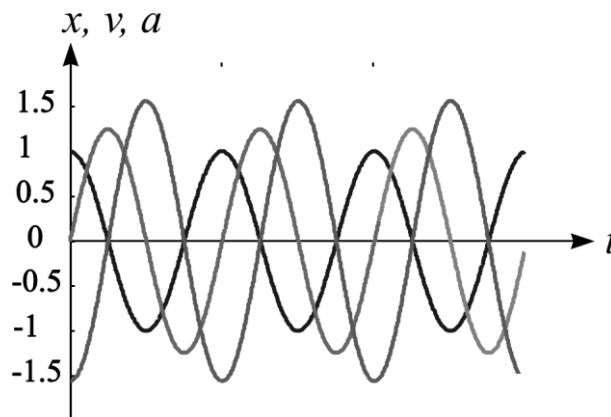


Figura 10 Representación gráfica de la respuesta del sistema.

Para un sistema lineal con un solo grado de libertad, la ecuación gobernante toma la forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t), \quad (7)$$

lo cual es una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de segundo orden y primer grado. En la misma, x es el desplazamiento; t , el tiempo; m , la masa; k , la rigidez; c , la constante de amortiguamiento y $F(t)$ la fuerza de excitación externa.

Sin embargo, en sistemas con varios grados de libertad, se tiene un sistema de ecuaciones gobernantes de la forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}(t), \quad (8)$$

donde $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son matrices cuadradas, cuya dimensión coincide con los grados de libertad del sistema, que representan, respectivamente, la masa, la rigidez y el amortiguamiento del sistema; $\{x\}$ es el vector de los desplazamientos y $\{F\}$ el vector de las fuerzas excitatrices externas.

En los sistemas continuos, también llamados sistemas de parámetros distribuidos, existe un número infinito de grados de libertad (Kelly, 2000). Las vibraciones de un sistema continuo son regidas por ecuaciones diferenciales parciales.

Las coordenadas espaciales son usadas para describir la distribución de la inercia cuando el sistema está en equilibrio. Todo sistema es en realidad un sistema continuo.

El movimiento vibratorio de un sistema continuo puede describirse según el principio de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - U) + \delta W_{nc}] dt = 0, \quad (9)$$

donde T es la energía cinética del sistema; U , su energía potencial y W_{nc} , el trabajo de las fuerzas no conservativas que actúan sobre él.

Como tanto las energías cinéticas y potencial como el trabajo de las fuerzas no conservativas son funciones de las coordenadas y del tiempo, la expresión 9 es una ecuación diferencial en derivadas parciales, que sólo tiene solución analítica para un número limitado de casos relativamente sencillos.

3. Método de elementos finitos para el análisis de las vibraciones mecánicas

El método de elementos finitos (*finite element method*, FEM) es una técnica numérica de solución aproximada de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que

resulta especialmente conveniente para la solución de este tipo de sistemas definidos sobre dominios especiales complejos.

La base del FEM es dividir todo el dominio continuo sobre el que están definidas las ecuaciones diferenciales a resolver, en un número finito (aunque usualmente grande) de elementos. Así el sistema de infinitos grados de libertad se transforma en otro con un número finito de grados de libertad. Esto hace que la ecuación diferencial pueda ser sustituida por un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, cuya solución puede llevarse a cabo por métodos numéricos convencionales.

El método de elementos finitos tiene más precisión en los modos más bajos y se incrementa a medida que aumenta el número de elementos del modelo pero genera una cantidad de ecuaciones tal que obliga el uso de la computación para resolver el problema. (Cook, 1994)

El método de elemento finito es utilizado como un método de aproximación discreta para resolver problemas de vibraciones que deben ser tratados como un sistema continuo con una precisión aceptable (Neise y Arnold 2001).

Éste abarca tanto el análisis de estructuras continuas como aquellas con un número de elementos conectados cada uno con el otro por condiciones de modeladas como un grupo de estructuras simples.

La principal ventaja de este método es su generalidad, este puede ser usado para calcular la frecuencia natural y los modos de estado de un sistema lineal elástico, sin embargo requiere de elevados recursos computacionales para resolver problemas reales con una precisión aceptable (Cook, 1994).

En general, la aplicación del FEM a un problema de vibraciones mecánicas no amortiguadas conduce a un sistema de ecuaciones de la forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}(t), \quad (10a)$$

donde el cálculo de los valores propios y los vectores propios de la matriz $[M]^{-1}[K]$ permite conocer los modos principales de vibración del sistema y sus respectivas frecuencias principales.

La solución de la expresión:

$$\{U\} = (-\omega^2[M] + [K])^{-1}\{F\}, \quad (10b)$$

por su parte, permite calcular la amplitud de los desplazamientos provocados por la fuerza excitatriz.

En el método de elementos finitos, las matrices de masa $[M]$ y de rigidez $[K]$ globales, se calculan a partir del ensamblaje de las matrices de masa y rigidez de cada uno de los elementos en que se divide el sistema $[m]^{(e)}$, $[k]^{(e)}$.

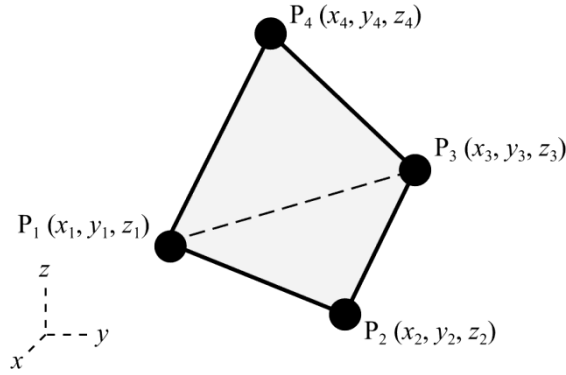


Figura 11. Elemento tetraédrico lineal

Las mismas, pueden determinarse a partir de las expresiones:

$$[m]^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \rho [N]^T [N] d\Omega^{(e)} ; \quad (11a)$$

$$[k]^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} [B]^T [D] [B] d\Omega^{(e)} . \quad (11b)$$

Donde $[N]$ es la matriz de funciones de forma; $[B]$ la matriz de deformación-desplazamientos; y $[D]$ la matriz de elasticidad (Petyt, 1990).

Para la modelación de cuerpos sólidos tridimensionales, se emplea ampliamente el elemento tetraédrico lineal (T4), que está formado por cuatro nodos (P_1 , P_2 , P_3 y P_4), distribuidos en el espacio de forma tal que no yazcan en un mismo plano (ver Fig. 11).

La matriz de rigidez, $[k]$ de este tipo de elemento está dada por la expresión (Petyt, 1990):

$$[k] = V [B]^T [D] [B] ; \quad (12)$$

donde V es el volumen del elemento, que puede calculase a partir de las coordenadas de sus nodos (x_i, y_i, z_i) , $i = 1 \dots 4$:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} ; \quad (13)$$

y $[B]$ es la matriz de deformación-desplazamiento, que para el tipo de elemento considerado toma la forma:

$$[B] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_{12} & 0 & 0 & & a_{42} & 0 & 0 \\ 0 & a_{13} & 0 & & 0 & a_{43} & 0 \\ 0 & 0 & a_{14} & \dots & 0 & 0 & a_{44} \\ a_{13} & a_{12} & 0 & & a_{43} & a_{42} & 0 \\ a_{14} & 0 & a_{12} & & a_{44} & 0 & a_{42} \\ 0 & a_{14} & a_{13} & & 0 & a_{44} & a_{43} \end{bmatrix}; \quad (14)$$

en la cual, los coeficientes a_{ij} , son los correspondientes cofactores de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Por su parte, $[D]$ es la matriz de elasticidad que, para materiales homogéneos e isotrópicos, está dada por la ecuación (Shabana, 2008):

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}; \quad (16)$$

en la cual, los coeficientes de Lamé, λ y μ , pueden calcularse a partir de las conocidas propiedades módulo de elasticidad lineal (módulo de Young), E , y coeficiente de Poisson, ν :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (17a-b)$$

La matriz de masa, $[m]$, para el elemento tetraédrico lineal, se determina mediante la ecuación (Petyt, 1990):

$$[m] = \frac{\rho V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad (18)$$

donde ρ es la densidad de masa del material.

4. Conclusiones.

Como se ha podido ver, la modelación de vibraciones mecánicas de sistemas continuos involucra ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, lo cual hace que la obtención de soluciones exactas a través de técnicas analíticas sea sólo posible en un reducido grupo de casos.

El método de elementos finitos, por su parte, es la técnica numérica más utilizada en la modelación y simulación de vibraciones, y ha mostrado ser eficiente en la obtención de soluciones aproximadas en una gran variedad de problemas prácticos.

Bibliografía.

- Bao, J.-H.; Zhang, P.; Zhu, C.-M., 2011. Modeling and control of longitudinal vibration on flexible hoisting systems with time-varying length. *Procedia Engineering* 15 p. 4521-4526.
- Cook, R.D., 1995. *Finite element modeling for stress analysis*. New York (USA): John Wiley and Sons, ISBN 0-471-10774-3.
- Gupta, U.S.; Ansari, A.H.; Sharma, S., 2006. Buckling and vibration of polar orthotropic circular plate resting on Winkler foundation. *Journal of Sound and Vibration* 297 (3-5) p. 457-476.
- Hong, C.C.; Liao, H.W.; Hwang, M.F.; Jane, K.C., 2008. Pure global buckling and vibration in laminates with arbitrary shape cut off regions. *International Journal of Mechanical Sciences* 50 (4) p. 694-703.

Kelly, S.G., 2000. *Fundamentals of mechanical vibrations*, 2nd Ed. Boston, MA (USA): McGraw-Hill, ISBN 0-07-230092-2.

Neise, W.; Arnold, F., 2001. On sound power determination in flow ducts. *Journal of Sound and Vibration* 244 (3) p. 481-503

Petyt, M., 1990. *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge (UK): Cambridge University Press, ISBN 0-521-26607-6.

Shabana, A., 2008. *Computational continuum mechanics*. Cambridge (UK): Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-88569-0.

Vlahopoulos, N.; Raveendra, S.T.; Vallance, C.; Messer, S., 1999. Numerical implementation and applications of a coupling algorithm for structural–acoustic models with unequal discretization and partially interfacing surfaces. *Finite Elements in Analysis and Design*, 32 (4), p. 257-277.

Wu y Tao 2002